

多维门限自回归序列的混合性*

宋心远 邓集贤 陈少玲
(中山大学数学系, 广州 510275) (惠州大学数学系)

摘 要 对多维门限自回归模型在给定阶数, 门限及延迟参数的假定下, 研究了模型所构成的 Markov 链的常返性、遍历性及混合性.

关键词 门限自回归, 常返性, 遍历性, 混合性

分类号 O211.61

1 有关 Markov 链的一些定义和性质

设 $\{x_n\}$ 为取值于一般状态空间 $(X, \mathcal{F})$ 的 Markov 链, $P^{(n)}(x, A)$ 为其 n 步转移概率.

令

$$G(x, A) = \sum_{n=1}^{\infty} P^{(n)}(x, A)$$
$$L(x, A) = P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} (x_n \in A) \mid x_0 = x\right\}$$
$$\mathcal{F}^+ = \{A; M(A) > 0, A \in \mathcal{F}\}$$

其中 M 为 φ -不可约链的最大不可约测度

定义 1 对 φ -不可约链 $\{x_n\}$, 若对任意的 $x \in \mathcal{X}, A \in \mathcal{F}^+$ 均有 $G(x, A) = \infty$, 则称 $\{x_n\}$ 为常返的. 若 $L(x, A) = 1$, 则称 $\{x_n\}$ 为 Harris 常返的.

定义 2 不可约链 $\{x_n\}$ 称为遍历的, 如果存在 $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ 上唯一的概率测度 π , 使得对任意的 $A \in \mathcal{F}$ 均满足

$$\int P(x, A) \pi(dx) = \pi(A) \quad x \in \mathcal{X}$$

定义 3 Markov 链 $\{x_n\}$ 称为是 Harris 遍历的, 如果存在 $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ 上的一个概率测度 π , 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P^{(n)}(x, \cdot) - \pi\| = 0 \quad x \in \mathcal{X}$$

其中 $\|\cdot\|$ 为全变差范数.

定义 4 若序列 $\{x_n\}$ 满足

收稿日期: 1994-12-29

* 国家自然科学基金及国家教委博士点基金资助项目

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \alpha(n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

其中, $A \in \mathcal{F}_k \triangleq \sigma\{x_t: t \leq k\}$, $B \in \mathcal{F}_{k+n} \triangleq \sigma\{x_t: t > k+n\}$ 则称 $\{x_n\}$ 为混合的.

性质 1 设 $\{x_n\}$ 为强不可约的, 且它是常返链, 则 $\{x_n\}$ 为 Harris 常返的.

证明 见[1].

性质 2 设 $\{x_n\}$ 为 φ -不可约链, 则或者 $\{x_n\}$ 为常返, 或者存在集列 $A_n \uparrow \mathcal{X}$, 使得

$$G(x, A_n) < +\infty, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad n \geq 1$$

证明 见[1].

性质 3 设 $\{x_n\}$ 是遍历的, 则 $\{x_n\}$ 是常返的.

证明 设 $\{x_n\}$ 是遍历的, 但不是常返的. 由性质 2, 存在集列 $A_n \uparrow \mathcal{X}$, 使得

$$G(x, A_n) < +\infty, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad n \geq 1$$

但由遍历性,

$$\pi(A_n) = \int P^{(m)}(x, A_n) \pi(dx), \quad n \geq 1, m \geq 1$$

故对任意的正整数 K ,

$$\begin{aligned} K\pi(A_n) &= \int \sum_{m=1}^K P^{(m)}(x, A_n) \pi(dx) \\ &\leq \int G(x, A_n) \pi(dx), \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

由 $A_n \uparrow \mathcal{X}$ 及 π 的下半连续性,

$$\pi(A_n) \rightarrow \pi(\mathcal{X}) = 1, \quad n \rightarrow \infty$$

从而存在 n_0 , 使得 $\pi(A_{n_0}) > \frac{1}{2}$. 故

$$\frac{k}{2} \leq k\pi(A_{n_0}) \leq \int G(x, A_{n_0}) \pi(dx)$$

在上式中, 左边是一无界量, 而右边关于 K 有界, 矛盾. 因此, $\{x_n\}$ 必为常返的.

性质 4 设 $\{x_n\}$ 为 φ -不可约的, 则 $\{x_n\}$ 是 Harris 遍历的充分必要条件是 $\{x_n\}$ 为非周期和 Harris 常返的遍历链.

证明 见[2].

性质 5 若 Markov 链 $\{x_n\}$ 是 Harris 遍历的, 则 $\{x_n\}$ 是混合的.

证明 任取 $A \in \mathcal{F}_k, B \in \mathcal{F}_{k+n}$, 由 Markov 性,

$$\begin{aligned} |P(A \cap B) - P(A)P(B)| &= |P(A)[P(B|A) - P(B)]| \\ &\leq |P(B|x_k) - P(B)| = \left| \int_x P(B|x_{k+n}) [P^{(n)}(x_k, dx_{k+n}) - \pi(dx_{k+n})] \right| \\ &\leq \|P^{(n)}(x, \cdot) - \pi\| \triangleq \alpha(n) \end{aligned}$$

其中, $\pi(\cdot)$ 为 $\{x_n\}$ 唯一的平稳绝对概率分布.

由假设, $\alpha(n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. 结论得证.

2 多维门限自回归序列的混合性

考虑 K 维门限自回归模型

$$Z_t = \sum_{j=1}^p A_j^{(i)} Z_{t-j} + \epsilon_t^{(i)} \quad \text{当 } Z_{t-d} \in R_i^k \quad i=1, \dots, l \quad (1)$$

其中, $\{R_i^k\}$ 是 K 维欧氏空间的一个剖分, 参数 ρ, d, l 均假定为已知. $A_j^{(i)} = (a_j^{(i)}(m, n))_{k \times k}$, $\{\epsilon_i^{(i)}\}$ 的假定见[3]. 令

$$Z_t = (Z_{t-p}' \ Z_{t-p+1}' \cdots Z_{t-1}')'$$

[3]中已证明了 $\{Z_t\}$ 为 R^{kp} 上具有平稳转移概率的 Markov 链.

$$\text{令 } x = (x_1' \ x_2' \ \cdots \ x_p')', \quad y = (y_1' \ y_2' \ \cdots \ y_p')'$$

则上述 Markov 链的转移概率密度为

$$P(x, y) = \begin{cases} f_i(y_p - \sum_{j=1}^p A_j^{(i)} y_{p-j}) & \text{当 } y_{j-1} = x_j, j=1, \cdots, p, \text{ 且 } y_{p-d} \in R_i^k \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

其中, $f_i(\cdot)$ 为自噪声 $\epsilon_i^{(i)}$ 的正概率密度.

定理 1 Markov 链 $\{Z_t\}$ 是强不可约, 非周期的.

证明 设 L_{kp} 为 kp -维 Lebesgue 测度, 则对任意的 $x \in R^{kp}$, $A \in \mathcal{B}^{kp}$, $L_{kp}(A) > 0$, 显然有 $P(x, A) > 0$, 从而 $G(x, A) > 0$, 故 $\{Z_t\}$ 是 L_{kp} -不可约的.

设 M 为其最大不可约测度, 则对任意的 $A \in \mathcal{B}^{kp}$,

$$M(A) = 0 \Rightarrow L_{kp}(A) = 0 \Rightarrow P(x, A) = 0, \quad \forall x \in R^{kp}$$

而

$$P^{(n+1)}(x, A) = \int P(x, dy) P^{(n)}(y, A), \quad n \geq 1$$

故对一切 $n \geq 1$, $P^{(n)}(x, A) = 0$, 即 $G(x, A) = 0$, $\forall x \in R^{kp}$, 从而 $\{x; G(x, A) > 0\}$ 为空集

所以 $\{Z_t\}$ 为强不可约的.

又若 $\{Z_t\}$ 具有周期 d , 则存在 n_0 , 使得当 $n > n_0$ 时有

$$P^{(nd)}(x, \{x\}) > 0, \quad \forall x \in R^{kp}$$

记 $\Omega = R^{kp} - \{x\}$, 则显然有

$$P(x, \Omega) = 1, \quad \forall x \in R^{kp}$$

$$\text{故 } P^{(nd)}(x, \Omega) = \int P^{(nd-1)}(x, dy) P(y, \Omega) = 1$$

从而

$$P^{(nd)}(x, R^{kp}) = P^{(nd)}(x, \{x\}) + P^{(nd)}(x, \Omega) > 1$$

矛盾. 所以 $\{Z_t\}$ 是非周期的.

定理 2 若模型(1)满足条件

$$\sum_{j=1}^p \|A_j^{(i)}\| < 1, \quad i=1, \cdots, l \quad (2)$$

其中

$$\|A_j^{(i)}\| = \max_{1 \leq n \leq k} \sum_{m=1}^k |a_j^{(i)}(m, n)|$$

则 $\{Z_t\}$ 是遍历的.

证明 见[3].

定理 3 在条件(2)下, $\{Z_t\}$ 是混合的.

证明 由于 $\{Z_t\}$ 是强不可约的遍历链, 由性质 1 和性质 3, $\{Z_t\}$ 是 Harris 常返的, 由性质 4, $\{Z_t\}$ 是 Harris 遍历的, 再由性质 5, $\{Z_t\}$ 是混合的.

参 考 文 献

- 1 Tweedie R L. Criteria for classifying general Markov Chains. Adv Appl, 1976, Prob 8, 737~771
- 2 盛昭瀚等. 非线性时间序列的稳定性分析. 遍历性理论与应用. 北京: 科学出版社, 1993
- 3 宋心远, 邓集贤. 多维门限自回归模型参数估计的强相容性. 中山大学学报(自然科学版), 1990, 29(1): 23~28

Mixing Property for Multiple TAR Models

Song Xinyuan* Deng Jixian Chen Shaoling

Abstract We study the recurrence, ergodicity and mixing property of Markov chain formed by the (TAR) model in which the order, thresholds and parameters are fixed.

Keywords threshold autoregressive, recurrence, ergodicity, mixing

• 简 讯 •

本刊从 1996 年起改为双月刊

为适应本校教学、科研发展的需要,经上级部门批准,中山大学学报(自然科学版)从 1996 年起由季刊改为双月刊. 每期逢单月 25 日出版,128 页,定价不变,每本仍为 5 元.

改刊后,拟增设“科技快报”专栏. 其内容包括自然科学领域内各种新理论、新实验、新材料、新器件、新工艺、新设计和新产品等,字数一般在 1000 字以内,由单独版面刊出. 将在收稿后半年内发表.

(朱 娴)

* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275